2.3 ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΜΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες : $ημ^2ω + συν^2ω = 1$

$$εφω = \frac{ημω}{συνω}$$

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Χρησιμότητα των τύπων :
- Ξέρω έναν τριγωνομετρικό αριθμό και βρίσκω τους άλλους
- Αποδεικνύω τριγωνομετρικές ταυτότητες

2.

Ο τύπος $ημ^2ω + συν^2ω = 1$: Από τον τύπο αυτό βρίσκουμε και πρέπει να θυμόμαστε ότι $ημ^2ω = 1 - συν^2ω$

$συν^2ω = 1 - ημ^2ω$

3.

Μέθοδος : Για να αποδείξουμε μία τριγωνομετρική ταυτότητα ή ξεκινάμε από το ένα μέλος και μετά από κατάλληλη επεξεργασία φτάνουμε στο άλλο ή επεξεργαζόμαστε ολόκληρη την ταυτότητα και φτάνουμε σε κάποια που ισχύει.

Στα πλαίσια της όποιας επεξεργασίας :
- Όταν έχουμε εφαπτομένες και θέλουμε ημιτονοσυνημίτονα κάνουμε την αντικατάσταση $εφ = \frac{ημ}{συν}$
- Όταν έχουμε ημίτονα και θέλουμε συνημίτονα κάνουμε την αντικατάσταση $ημ^2ω = 1 - συν^2ω$

  Όταν έχουμε συνημίτονα και θέλουμε ημίτονα κάνουμε την αντικατάσταση $συν^2ω = 1 - ημ^2ω$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες .

α) Αν $ημ^2ω = 0$ τότε $συν^2ω = 1$ Σ

β) Για κάθε γωνία ω ισχύει $συν^2ω = ημ^2ω - 1$ Λ

γ) Αν $ημω = \frac{3}{5}$ και $συνω = \frac{4}{5}$ τότε $εφω = \frac{3}{4}$ Σ

δ) Υπάρχει γωνία ω τέτοια ώστε $ημω = \frac{1}{4}$ και $συνω = \frac{3}{4}$ Λ

ε) Αν $συνω = 0$ τότε $ημω = 1$ Λ

στ) $εφ110^o = \frac{ημ110^o}{-συν70^o}$ Σ

ζ) $ημ^2 35^o + συν^2 145^o = 1$ Σ

Προτεινόμενη λύση

α)

Αν $ημ^2ω = 0$ ο τύπος $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ γίνεται $συν^2ω = 1$. Πρόταση σωστή

β)

Είναι $συν^2ω = 1 - ημ^2ω$. Πρόταση λάθος

γ)

$εφω = \frac{ημω}{συνω} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$. Πρόταση σωστή

δ)

$ημ^2ω + συν^2ω = 1$ άρα $\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1$

$\frac{1}{16} + \frac{9}{16} = 1$

$\frac{10}{16} = 1$ Πρόταση λάθος

ε)

Αν $συνω = 0$ ο τύπος $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ γίνεται $ημ^2ω = 1$ οπότε

$ημω = \pm 1$ Πρόταση λάθος

στ)

$\frac{ημ110^o}{-συν70^o} = \frac{ημ110^o}{συν110^o} = εφ110^o$ Πρόταση σωστή

ζ)

$ημ^2 35^o + συν^2 145^o = ημ^2 35^o + (-συν35^o)^2 = ημ^2 35^o + συν^2 35^o = 1$ Πρόταση σωστή

2.

α) Αν $\eta\mu\omega = \dfrac{3}{4}$ και $0^o < \omega < 90^o$, να υπολογιστούν οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω.

β) Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = -\dfrac{12}{13}$ και $90^o < \omega < 180^o$, να υπολογιστούν οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω.

γ) Αν $\varepsilon\varphi\omega = -2$ και $90^o < \omega < 180^o$, να υπολογιστούν οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 2

α)

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

Άρα $\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$ ή $\sigma\upsilon\nu\omega = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ και επειδή $0^o < \omega < 90^o$, είναι $\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

β)

$$\eta\mu^2\omega = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$$

Άρα $\eta\mu\omega = \dfrac{5}{13}$ ή $\eta\mu\omega = -\dfrac{5}{13}$ και επειδή $90^o < \omega < 180^o$, είναι $\eta\mu\omega = \dfrac{5}{13}$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}$$

γ)

$\varepsilon\varphi\omega = -2$ άρα $\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = -2$ οπότε $\eta\mu\omega = -2\sigma\upsilon\nu\omega$ **(1)**

Ο τύπος $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ γίνεται

$$(-2\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

$$4\sigma\upsilon\nu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

$$5\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{5}$$

$\sigma\upsilon\nu\omega = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ και επειδή $90^o < \omega < 180^o$ είναι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Η (1) δίνει $\eta\mu\omega = (-2)\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

3.

Αν $ημω = \frac{3}{5}$ και $90^o < ω < 180^o$ να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$Α = \frac{2ημω - 3συνω + 2εφω}{συνωεφω}$$

Προτεινόμενη λύση

$$συν^2ω = 1 - ημ^2ω = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

Άρα $συνω = \frac{4}{5}$ ή $συνω = -\frac{4}{5}$ και επειδή $90^o < ω < 180^o$, είναι $συνω = -\frac{4}{5}$

$$εφω = \frac{ημω}{συνω} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$Α = \frac{2ημω - 3συνω + 2εφω}{συνωεφω} = \frac{2 \cdot \frac{3}{5} - 3 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)}{\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{\frac{6}{5} + \frac{12}{5} - \frac{6}{4}}{\frac{12}{20}} = \frac{7}{2}$$

4.

Να αποδείξετε ότι $ημ^2x - συν^2x = 1 - 2συν^2x = 2ημ^2x - 1$

Σχόλιο 3

Προτεινόμενη λύση

$ημ^2x - συν^2x = 1 - συν^2x - συν^2x = 1 - 2\,συν^2x$

$ημ^2x - συν^2x = ημ^2x - (1 - ημ^2x) = ημ^2x - 1 + ημ^2x = 2ημ^2x - 1$

5.

Αν $2ημx - συνx = 0$ και $0^o < x < 90^o$, να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x.

Προτεινόμενη λύση

$2ημx - συνx = 0$ άρα $2ημx = συνx$ **(1)**

Ο τύπος $ημ^2x + συν^2x = 1$ γίνεται

$ημ^2x + (2ημx)^2 = 1$

$ημ^2x = \frac{1}{5}$

$ημx = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ και επειδή $0^o < x < 90^o$, θα είναι $ημx = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Η (1) δίνει $συνx = \frac{2}{\sqrt{5}}$, τότε $εφx = \frac{ημx}{συνx} = \frac{1}{2}$

6.
Να δείξετε ότι
i) $ημx συν^2ω + ημx\ ημ^2ω = ημx$ **ii)** $(2ημα + 2συν\ α)^2 = 4 + 8ημασυνα$

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 3

i)
$ημx συν^2ω + ημx\ ημ^2ω = ημx(συν^2ω + ημ^2ω) = ημx\cdot 1 = ημx$

ii)
$$(2ημα + 2συν\ α)^2 = 4\ ημ^2α + 8ημασυνα + 4συν^2α =$$
$$= 4(ημ^2α + συν^2α) + 8\ ημα\ συνα =$$
$$= 4\cdot 1 + 8\ ημα\ συνα =$$
$$= 4 + 8ημασυνα$$

7.
Να δείξετε ότι $(5συν\ θ + 3ημθ)^2 + (5ημθ - 3συνθ)^2 = 34$
Προτεινόμενη λύση
$$(5συν\ θ + 3ημθ)^2 + (5ημθ - 3συνθ)^2 =$$
$$= 25συν^2θ + 30ημθσυνθ + 9\ ημ^2θ + 25ημ^2θ - 30ημθσυνθ + 9\ συν^2θ =$$
$$= 34συν^2θ + 34\ ημ^2θ = 34(συν^2θ + ημ^2θ) = 34$$

8.
Αν $x = 4ημθ$ και $y = 4συνθ$ δείξτε ότι
i) $x^2 + y^2 = 16$ **ii)** $xημθ + y\ συνθ = 4$
Προτεινόμενη λύση
i)
$$x^2 + y^2 = (4ημθ)^2 + (4συνθ)^2 = 16ημ^2θ + 16\ συν^2θ =$$
$$= 16(ημ^2θ + συν^2θ) =$$
$$= 16$$
ii)
$$xημθ + y\ συνθ = 4ημθ\ ημθ + 4συνθσυνθ = 4ημ^2θ + 4συν^2θ =$$
$$= 4(ημ^2θ + συν^2θ) =$$
$$= 4$$

9.

Να αποδείξετε ότι **i)** $\frac{\eta\mu^2\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta} = 1-\sigma\upsilon\nu\theta$ **ii)** $\frac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\frac{\eta\mu^2\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{(1-\sigma\upsilon\nu\theta)(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{1+\sigma\upsilon\nu\theta} = 1-\sigma\upsilon\nu\theta$$

ii)

$$\frac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\eta\mu\theta(1-\sigma\upsilon\nu\theta)}{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)(1-\sigma\upsilon\nu\theta)} = \frac{\eta\mu\theta(1-\sigma\upsilon\nu\theta)}{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta} =$$

$$= \frac{\eta\mu\theta(1-\sigma\upsilon\nu\theta)}{\eta\mu^2\theta} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}$$

10.

Να αποδείξετε ότι

i) $\eta\mu^2 15^o + \sigma\upsilon\nu^2 165^o = 1$ **ii)** $\eta\mu^2(24^o + x) + \sigma\upsilon\nu^2 (156^o - x) = 1$

Προτεινόμενη λύση

i)

15^o , 165^o παραπληρωματικές άρα ίσα ημίτονα

$\eta\mu^2 15^o + \sigma\upsilon\nu^2 165^o = \eta\mu^2 165^o + \sigma\upsilon\nu^2 165^o = 1$ (ισχύει $\eta\mu 15^o = \eta\mu 165^o$)

ii)

Είναι $(24^o + x) + (156^o - x) = 24^o + x + 156^o - x = 180^o$

Άρα $\eta\mu(24^o + x) = \eta\mu(156^o - x)$

Οπότε $\eta\mu^2(24^o + x) + \sigma\upsilon\nu^2 (156^o - x) = \eta\mu^2(156^o - x) + \sigma\upsilon\nu^2 (156^o - x) = 1$

11.

Να αποδείξετε ότι

i) $\dfrac{ημω + εφω}{εφω} = 1 + συνω$ **ii)** $εφ^2ω(1-ημ^2ω) = ημ^2ω$

iii) $συν^2 ω + εφ^2ω + ημ^2ω = \dfrac{1}{συν^2ω}$ **iv)** $ημ^2ω + ημ^2ω\, εφ^2ω = εφ^2ω$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\frac{ημω + εφω}{εφω} = \frac{ημω + \dfrac{ημω}{συνω}}{\dfrac{ημω}{συνω}} = \frac{\dfrac{ημωσυνω + ημω}{συνω}}{\dfrac{ημω}{συνω}} = \frac{ημωσυνω + ημω}{ημω} =$$

$$= \frac{ημωσυνω}{ημω} + \frac{ημω}{ημω} = συνω + 1$$

ii)

$$εφ^2ω(1-ημ^2ω) = \frac{ημ^2ω}{συν^2ω}συν^2ω = ημ^2ω$$

iii)

$$συν^2 ω + εφ^2ω + ημ^2ω = (συν^2 ω + ημ^2ω) + εφ^2ω =$$

$$= 1 + εφ^2ω = 1 + \frac{ημ^2ω}{συν^2ω} =$$

$$= \frac{συν^2ω + ημ^2ω}{συν^2ω} = \frac{1}{συν^2ω}$$

iv)

$$ημ^2ω + ημ^2ω\, εφ^2ω = ημ^2ω\,(1 + εφ^2ω) = ημ^2ω\left(1+\frac{ημ^2ω}{συν^2ω}\right) =$$

$$= ημ^2ω\cdot\frac{συν^2ω + ημ^2ω}{συν^2ω} = ημ^2ω\cdot\frac{1}{συν^2ω} = \frac{ημ^2ω}{συν^2ω} = εφ^2ω$$

12.

Να αποδείξετε ότι

i) $ημ^4ω - συν^4ω = 1 - 2ημ^2ω$ **ii)** $\dfrac{1}{ημ^2x} + \dfrac{1}{συν^2x} = \dfrac{1}{ημ^2xσυν^2x}$

iii) $\dfrac{ημx}{συνx} + \dfrac{συνx}{ημx} = \dfrac{1}{ημxσυνx}$ **iv)** $\dfrac{1-εφ^2x}{1 + εφ^2x} = 2συν^2x - 1$

v) $\dfrac{1 + συνx}{ημx} + \dfrac{ημx}{1 + συνx} = \dfrac{2}{ημx}$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$ημ^4ω - συν^4ω = (ημ^2ω - συν^2ω)(ημ^2ω + συν^2ω) =$$
$$= (ημ^2ω - συν^2ω)\cdot 1 =$$
$$= ημ^2ω - συν^2ω =$$
$$= ημ^2ω - (1 - ημ^2ω) =$$
$$= ημ^2ω - 1 + ημ^2ω =$$
$$= 2ημ^2ω - 1$$

ii)

$$\frac{1}{ημ^2x} + \frac{1}{συν^2x} = \frac{συν^2x + ημ^2x}{ημ^2xσυν^2x} = \frac{1}{ημ^2xσυν^2x}$$

iii)

$$\frac{ημx}{συνx} + \frac{συνx}{ημx} = \frac{ημ^2x}{συνxημx} + \frac{συν^2x}{ημxσυνx} = \frac{ημ^2x + συν^2x}{συνxημx} = \frac{1}{ημxσυνx}$$

iv)

$$\frac{1 - εφ^2x}{1 + εφ^2x} = \frac{1 - \frac{ημ^2x}{συν^2x}}{1 + \frac{ημ^2x}{συν^2x}} = \frac{\frac{συν^2x - ημ^2x}{συν^2x}}{\frac{συν^2x + ημ^2x}{συν^2x}} = συν^2x - ημ^2x =$$
$$= συν^2x - (1 - συν^2x) =$$
$$= συν^2x - 1 + συν^2x =$$
$$= 2συν^2x - 1$$

v)

$$\frac{1 + συνx}{ημx} + \frac{ημx}{1 + συνx} = \frac{(1 + συνx)^2}{ημx(1 + συνx)} + \frac{ημ^2x}{ημx(1 + συνx)} =$$
$$= \frac{1 + 2συνx + συν^2x + ημ^2x}{ημx(1 + συνx)} = \frac{1 + 2συνx + 1}{ημx(1 + συνx)} =$$
$$= \frac{2 + 2συνx}{ημx(1 + συνx)} = \frac{2(1 + συνx)}{ημx(1 + συνx)} = \frac{2}{ημx}$$

13.

Να αποδείξετε ότι

α) $εφ^2 40^o συν^2 40^o + συν^2 140^o = 1$

β) $ημ40^o\ ημ140^o - συν40^o\ συν140^o = 1$

γ) $ημ(180^o - x)συνx\ εφ(180^o - x) = -ημ^2 x$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$εφ^2 40^o συν^2 40^o + συν^2 140^o = εφ^2 40^o συν^2 40^o + (-συν40^o)^2 =$$
$$= εφ^2 40^o συν^2 40^o + συν^2 40^o =$$
$$= \frac{ημ^2 40^o}{συν^2 40^o} συν^2 40^o + συν^2 40^o =$$
$$= ημ^2 40^o + συν^2 40^o = 1$$

β)

$$ημ40^o\ ημ140^o - συν40^o\ συν140^o = ημ40^o\ ημ40^o - συν40^o\ (-συν40^o) * =$$
$$= ημ^2 40^o + συν^2 40^o = 1$$

* ισχύουν $ημ140^o = ημ40^o$ και $συν140^o = -συν40^o$

γ)

$$ημ(180^o - x)συνx\ εφ(180^o - x) = ημ(180^o - x)συνx\ \frac{ημ(180^o - x)}{συν(180^o - x)} =$$
$$= ημxσυνx\ \frac{ημx}{-συνx} = -ημ^2 x$$

14.

Αν είναι $x = ρημθσυνφ$, $y = ρημθημφ$ και $z = ρσυνθ$ δείξτε ότι $x^2 + y^2 + z^2 = ρ^2$

Προτεινόμενη λύση

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ρημθσυνφ)^2 + (ρημθημφ)^2 + (ρσυνθ)^2 =$$
$$= ρ^2 ημ^2 θσυν^2 φ + ρ^2 ημ^2 θημ^2 φ + ρ^2 συν^2 θ =$$
$$= ρ^2 ημ^2 θ(συν^2 φ + ημ^2 φ) + ρ^2 συν^2 θ =$$
$$= ρ^2 ημ^2 θ \cdot 1 + ρ^2 συν^2 θ = ρ^2 (ημ^2 θ + συν^2 θ) = ρ^2$$

15.

Αν ημθ = $\frac{\lambda+1}{\lambda-1}$ και συνθ = $\frac{2\lambda}{\lambda-1}$ να βρείτε τις τιμές του λ.

Προτεινόμενη λύση

ημ^{2}θ + συν^{2}θ = 1 άρα $\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^2 + \left(\frac{2\lambda}{\lambda-1}\right)^2 = 1$ με $\lambda \neq 1$

$\frac{(\lambda+1)^2}{(\lambda-1)^2} + \frac{4\lambda^2}{(\lambda-1)^2} = 1$

$4\lambda^2 + 4\lambda = 0$

$4\lambda(\lambda + 1) = 0$ άρα $\lambda = 0$ ή $\lambda = -1$ δεκτές και οι δύο